1. 超ケーラー多様体入門

定義体は $\mathbb{R}$（実数体）とする。　他の体でおきかえることは不可能

C^∞ 級多様体のカテゴリーで考える。　代数多様体のカテゴリーで考えることは不可能

$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i \oplus \mathbb{R}j \oplus \mathbb{R}k$　　四元数体（非可換）　$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

問.　四元数体に基づく多様体論は展開できるか？

答1　正則関数 ＝ 微分が複素線型（Cauchy-Riemann方程式）の拡張として

$\mathbb{H} \xrightarrow{f} \mathbb{H}$ の微分が四元数線型を考えてみる

$\Longrightarrow$ f は一次関数　　すなわち関数論は展開できない。

よって四元多様体論はない。

（cf. 複素多様体論）

答2　複素多様体 ＝ 可積分な概複素多様体

$\Leftrightarrow$ 概複素構造 $I : T_X \to T_X$ 　$I^2 = -1$ を持ち

小林-野水 II p.145　さらに compatible な torsion-free な接続 ∇ を許す。

そこで　**Def**（小星）

hypercomplex 多様体 とは，ど多様体 X と 3つの概複素構造 I, J, K で $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ をみたし，さらに $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ となる torsion-free な接続 ∇ を許すもののことである。

定理 & 定義

$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1$ をみたしているものとする。次は同値

(1) $\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0$ となる torsion-free な接続 ∇ を許す

(2) I, J, K はそれぞれ可積分な概複素構造である。

さらに (1) の接続 ∇ は unique であり，小星接続と呼ぶ。

例　$X = \mathbb{H}^n$　もしくはその開集合の商　Hopf曲面　$\mathbb{H}^n \setminus 0 / \mathbb{Z}$

他にもたくさん例はあるが，ここでは紹介しない

超ケーラー多様体　＝　ケーラー多様体 v.s. 複素多様体

→ hypercomplex 多様体　でおきかえたもの

定義　超ケーラー多様体とは，hypercomplex 多様体 (X, I, J, K) に Riemann 計量 g を付け加えたもので，$g(I\cdot, I\cdot) = g(J\cdot, J\cdot) = g(K\cdot, K\cdot) = g(\cdot, \cdot)$ であり　さらに g が小畠接続に関して平行　$\nabla g = 0$　であるものをいう。

すなわち　g のレビ・チビタ接続 ＝ I, J, K の小畠接続

コンパクトな例はそれほどみつかっていないが　非コンパクトな例は多数ある　（箙多様体など）

◯ 超ケーラー多様体 は，複素シンプレクティック構造をもったケーラー多様体としての構造を下部にもつ

$$\mathbb{H} = \underbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i}\oplus\underbrace{\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}\underset{=ij}{k}} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j \qquad (\text{但し } \mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i)$$

四元数 q は2つの複素数の組 z_1+z_2j と思うことができる。

あとで重要になる注意.

$$\underbrace{\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}j}\oplus\underbrace{\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}\underset{=-ji}{k}} = \mathbb{C}'\oplus\mathbb{C}'i \qquad \text{但し } \mathbb{C}'=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}j$$

と思ってもよい

より一般に $ai+bj+ck$ $(a^2+b^2+c^2=1)$ を虚数単位と思うことができる。

そこで 概複素構造 I，リーマン計量 g，複素数値2次形式 $\omega_{\mathbb{C}}$ をとると，

(但し $\omega_{\mathbb{C}}(\cdot,\cdot) = g(J\cdot,\cdot) + i\, g(K\cdot,\cdot)$)

Iは可積分で，gはIに関してケーラー計量であり，$d\omega_{\mathbb{C}}=0$で，$\omega_{\mathbb{C}}$は非退化である。複素数値シンプレクティック型式

例 四元数トーラス $T = \mathbb{H}/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\tau_1\oplus\mathbb{Z}\tau_2\oplus\mathbb{Z}\tau_3$ $\quad 1, \tau_1, \tau_2, \tau_3 \in \mathbb{H}$ (一次独立$/\mathbb{R}$)

τ_1, τ_2, τ_3 を $\tau_a = z_a + w_a j$ $\quad (z_a, w_a \in \mathbb{C})$ と表せば

$$T = \mathbb{C}^2/\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\begin{bmatrix} z_1 \\ w_1 \end{bmatrix}\oplus\mathbb{Z}\begin{bmatrix} z_2 \\ w_2 \end{bmatrix}\oplus\mathbb{Z}\begin{bmatrix} z_3 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

となって 2次元複素トーラス となる。

注 $\mathbb{H} = \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j$ の代わりに $\mathbb{C}'\oplus\mathbb{C}'i$ $\quad \mathbb{C}' = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}j$ としても

やはり 2次元複素 トーラスになる。しかし 複素構造は 一般には異なる。

上の例から分かるとおり, 一般には 超ケーラー 多様体 から できる 複素多様体 は

$\mathbb{H} \cong \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}j$ の取り方に依存する。

すなわち

2つの相異なる複素多様体が 一つの(共通の)超ケーラー多様体 から 生じる ということ が 起こりうる。

あとでは使われないが Yau による結果を紹介しておく

Th. X : コンパクトな Kähler 多様体 で 複素シンプレクティック構造をもつとする

このとき 与えられた Kähler 計量 と 同じ Kähler 類 (すなわち Kähler form のコホモロジー類) をもつ Kähler 計量で, 超 Kähler 構造から来ているものがただ一つ存在する。

これにより K3 曲面の上の点のヒルベルト概型
トーラス 〃 (もしくは, それからできるクンマー多様体)
が超ケーラー多様体であることがわかる。

また K3 曲面上の安定層のモジュライ空間も, コンパクトになる場合には超ケーラーである
しかし 吉岡の結果により, これはヒルベルト概型と変形同値である。

上の例 (無限にある) と O'Grady による 2つの例外的な例 以外には
コンパクトな超ケーラー多様体 (の変形同値類) は知られていない。

○ 超ケーラー商 [HKLR]

まずシンプレクティック商について復習する。

(M,ω)：(実)シンプレクティック多様体

$G \curvearrowright (M,\omega)$ ：コンパクトなリー群のシンプレクティック形式を保つ作用

$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^* = \mathrm{Lie}\,G^*$ ：モーメント写像

1) G-同変

2) $\forall \xi \in \mathfrak{g}$ $\quad \langle \xi, d\mu(\cdot) \rangle = \omega(\xi^*, \cdot)$

但し ξ^* は ξ の生成する M 上のベクトル場

$\zeta \in \mathfrak{g}^*$ s.t. $\mathrm{Ad}_g^*(\zeta) = \zeta \quad \forall g \in G$ を取り

$\mu^{-1}(\zeta)/G$ を考える。シンプレクティック商という。

Th (Marsden-Weinstein)

Gの作用はfreeとする。 $\mu^{-1}(\xi)/G$ は $\pi^*\omega_\xi = i^*\omega$ となるシンプレクティック形式をもつ

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\xi) & \xrightarrow{i} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \mu^{-1}(\xi)/G & & \end{array}$$

(構成はこの式でdef.されるformが商に落ち、シンプレクティックであることをみる)

例. $\mathbb{C}^{n+1} \curvearrowleft S^1$

$$\omega = \sum dx_\alpha \wedge dy_\alpha$$

$$\mu = \frac{i}{2}\sum(|x_\alpha|^2 + |y_\alpha|^2)$$

$$\mu^{-1}(\xi)/S^1 = \begin{cases} \mathbb{C}P^n & (\frac{1}{2}\xi > 0) \\ \text{一点} & (\frac{1}{2}\xi = 0) \\ \phi & (\frac{1}{2}\xi < 0) \end{cases}$$

作用がfreeなのは $\frac{1}{2}\xi > 0$ のときで、商としての

シンプレクティック形式はFubini-Study形式の定数倍である

○ 幾何学的不変式論との関連 (Kempf-Ness, Kirwan)

M は準射影的多様体 $/\mathbb{C}$

$L \to M$ ample な直線束

ω : M 上の Kähler 形式で $c_1(L) = [\omega]$

$G \curvearrowright M$ は G の複素化 $G^{\mathbb{C}}$ の正則な作用に拡張されているものとする

ζ は指標 $G \to U(1)$ から来ているものとする

Th. (正確ではない)

$G \curvearrowright \mu^{-1}(\zeta)$ は自由とする

$$\mu^{-1}(\zeta)/G \cong \zeta\text{-安定な点}/G^{\mathbb{C}}$$

左辺は Kähler 多様体となり

$\cong$ は双正則を保つ

例

$$\mathbb{C}P^n = \mu^{-1}(\zeta)/G = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$$

$\mathbb{C}^{n+1}$ では $\{0\}$ だけが ζ-不安定な点である。

有名な Hitchin-小林対応は この Th の ∞次元多様体版と見ることができる。

(M,ω) : コンパクト ケーラー多様体

$E \to M$: M上の C^∞ 級ベクトル束 ，エルミート計量を入れておく
複素

$\mathcal{A}$ = E上の計量を保つ接続の全体　d_A　← ∞次元ケーラー多様体

$\cup$

$\mathcal{A}^{int} = \{ d_A = \partial_A + \bar\partial_A$ と分解したときに $\bar\partial_A^2 = 0 \}$ ← Kähler 部分多様体

$\mathcal{G} = \{ E \xrightarrow{\gamma} E \mid$ 計量を保つ $\} \subset \mathcal{G}^{\mathbb{C}}$: 計量を保つとは限らない

$\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{A}^{int}$ は $\mathcal{G}^{\mathbb{C}} \curvearrowright \mathcal{A}^{int}$ に伸びる　（ d_A は $\bar\partial_A$ + 計量で復元できるから ）

$\mathrm{Lie}\,\mathcal{G} = A^0(\mathrm{End\,skew}\,E)$　　End skew E の C^∞ section 全体

$\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}^* = A^{2n}(\mathrm{End\,skew}\,E)$　　積分で pairing を定める。

$n = \dim_{\mathbb{C}} M$

このとき $\mu : \mathcal{A}^{int} \longrightarrow \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}^*$

$d_A \longmapsto F_A \wedge \omega^{n-1}$ $\quad F_A$: A の曲率

このとき $\mu^{-1}(\lambda \, \mathrm{Id}_E \, \omega^n)/\mathcal{G} \cong \{$ 安定な正則ベクトル束 $\}/\mathcal{G}^{\mathbb{C}}$

Hitchin–小林対応

Donaldson, Uhlenbeck–Yau

(X, g, I, J, K) : 超ケーラー多様体

$\omega_I(\cdot,\cdot) = g(I\cdot,\cdot)$ etc. で3つのKähler形式をもつ

$G \curvearrowright (X, g, I, J, K)$: コンパクトなLie群の作用

$\mu : X \to \mathfrak{g}^* \otimes \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ が<u>超ケーラー運動量写像</u>であるとは

$\mu = (\mu_I, \mu_J, \mu_K)$

μ_I, μ_J, μ_K がそれぞれ $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ に関する運動量写像である

ことをいう

$\zeta = (\zeta_I, \zeta_J, \zeta_K) \in \mathfrak{g}^* \otimes \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ s.t. $\mathrm{Ad}_g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,\mathbb{H}}$ で固定される

を取り、

$\mu^{-1}(\zeta)/G$ を考える。

Th. [HKLR]

$\mu^{-1}(\zeta)$ に G が自由のとき

$\mu^{-1}(\zeta)/G$ は

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(\zeta) & \xhookrightarrow{i} & X \\ \downarrow \pi & & \\ \mu^{-1}(\zeta)/G & & \end{array} \qquad \pi^*\omega_A = i^*\omega_A \quad A = I, J, K$$

となる超ケーラー多様体の構造をもつ。

例. $X = \mathbb{H}^2 \qquad G = S^1$

$= \mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2)^* \qquad (z, w) \mapsto (tz, t^{-1}w) \qquad z \in \mathbb{C}^2,\ w \in (\mathbb{C}^2)^*$

$$\mu_I = \frac{i}{2}(|z|^2 - |w|^2)$$

$$\mu_J + i\mu_K = zw$$

$\mu^{-1}(\zeta)/S^1$ $(\zeta \neq 0)$ は 江口-Hanson space と呼ばれる

実4次元の非コンパクト多様体である

$\mu^{-1}(S)/G$ を複素多様体として記述するために幾何学的不変式論との関係を用いる。

概複素構造 I を取る。

$G \curvearrowright X$ は $G^{\mathbb{C}} \curvearrowright (X, I)$ 正則な作用に伸びると仮定する

このとき $\mu_{\mathbb{C}} = \mu_J + \sqrt{-1}\mu_K$ は (X, I) 上の正則写像であることに注意して

$G^{\mathbb{C}} \curvearrowright \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(S_{\mathbb{C}})$ に対して幾何学的不変式論を適用する

Th. $\mu^{-1}(S)/G \cong \{\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(S_{\mathbb{C}})$ の S_I-安定な点$\}/G^{\mathbb{C}}$

* $\mu_{\mathbb{C}}$ は $G^{\mathbb{C}}$ の作用に関する運動量写像とみなせる。

したがって "$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(S_{\mathbb{C}})/G^{\mathbb{C}}$" は複素多様体のカテゴリーにおけるシンプレクティック商である。

例. $\mathbb{H}^2 \curvearrowleft S^1$　　$\mathbb{C}^2 \oplus (\mathbb{C}^2)^* \curvearrowleft \mathbb{C}^*$　　正則に伸びている

$$(z, w) \mapsto (tz, t^{-1}w)$$

このとき　ζ_I-安定 $\Longleftrightarrow \begin{cases} z \neq 0 & \frac{1}{i}\zeta_I > 0 \\ \text{free orbit} & \frac{1}{i}\zeta_I = 0 \\ w \neq 0 & \frac{1}{i}\zeta_I < 0 \end{cases}$

となることがチェックできる

$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})$ の ζ_I-安定$/\mathbb{C}^*$ は何か？

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[d, shift left, "w"] \\ \mathbb{C}^2 \arrow[u, shift left, "z"] \end{tikzcd}$$

と書く　　$zw = \zeta_{\mathbb{C}}$

$wz \in \mathrm{End}\,\mathbb{C}^2$ は $\mathbb{C}^*$ で invariant であり

今の場合 wz で商が記述される

$(wz)^2 = wzwz = \zeta_{\mathbb{C}} \cdot wz$　　よって wz の固有値は 0 と $\zeta_{\mathbb{C}}$ である。

$\zeta_{\mathbb{C}} \neq 0$ のとき　ζ_I-安定性は自動的に成り立つ

$$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\mathbb{C}^* = \text{固有値 } 0, \zeta_{\mathbb{C}} \text{ をもつ } 2\times 2 \text{ 行列全体}$$

: semisimple (複素) coadjoint orbit

$\zeta_{\mathbb{C}} = 0$ のとき

$\frac{1}{i}\zeta_I > 0$

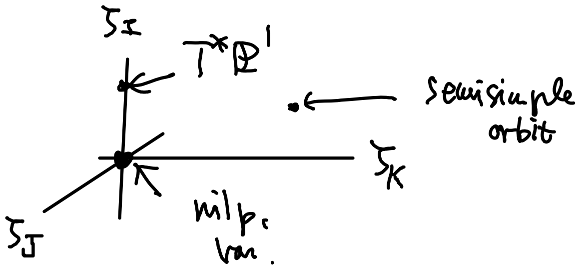
$$\begin{aligned} \mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\mathbb{C}^* &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \setminus 0/\mathbb{C}^* = \mathbb{CP}^1 \\ [z,w] &\longmapsto [z] \end{aligned}$$

を射影として　$\mu_{\mathbb{C}}^{-1}(\zeta_{\mathbb{C}})/\mathbb{C}^* = T^*\mathbb{CP}^1$ が分かる

$\frac{1}{i}\zeta_I < 0$ でも同様

$\zeta_I = 0$ のとき　$\mu^{-1}(0)/S^1 =$ nilpotent variety $= \{A \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) \mid A^2 = 0\}$

が分かる



I, J, K を入れかえると　ζ　で　$\zeta_{\mathbb{R}}=0$　という条件は
$\zeta_{\mathbb{C}}\neq 0$　にかわる

よって
$T^*\mathbb{C}P^1$ も semisimple orbit も
一つの超ケーラー多様体を違う方向から見たものである
特に、これらは微分同相である。

Vergne の Kostant-関口対応の解釈も
同じ原理による。

例. X = コンパクト・リーマン面

$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\mathrm{irr}}$: 前と同様　　可積分性 $\bar{\partial}_A^2 = 0$ は自動的に成立つ

$T^*\mathcal{A} = \mathcal{A} \times \Omega^1(\mathrm{End}_{\mathrm{skew}} E) \ni \Phi$: ヒッグス場

: $\underbrace{\text{(flat)}}_{\infty\text{次元}}$超ケーラー多様体 $\curvearrowleft \mathcal{G}$: ゲージ群

$$\mu_I = F_A + [\Phi \wedge \Phi^*]$$

$$\mu_J + i\mu_K = \bar{\partial}_A \Phi$$

$\Rightarrow$ $\mu^{-1}(\lambda i\, d_E\, \omega)/\mathcal{G} \cong$ 安定ヒッグス束/同型

$(\mu_{\mathbb{C}} = 0)$

一方　$\bar{\partial}_A + \Phi$ と $\partial_A + \Phi^*$ に分けて　幾何学的不変式論的モジュライを考えることもできる

$\mu^{-1}(\lambda i\, d_E\, \omega)/\mathcal{G}$ = キヤクな(射影的平坦)接続/同型

$= \mathrm{Hom}(\pi_1(X), PGL(r, \mathbb{C}))$/共役

2つを組み合わせて　安定ヒッグス束のモジュライ $=$ π_1の表現/共役

non abelian ホッジ理論

Simpson

Corlette

望月.